

## Weihnachtsträtsel 2011



Dieses Jahr haben die Engel dem Weihnachtsmann einen Streich gespielt. Sie haben seinen Schlitten entführt. Um ihn wiederzubekommen hat sich Knecht Ruprecht etwas Besonderes ausgedacht.

Bei der diesjährigen Weihnachtsfeier im Himmel, auch das gibt es, spielt er den Moderator einer



Quizshow. Kandidat ist unser Weihnachtsmann. Um an seinen Schlitten zu kommen, muss er sich zwischen drei Türen entscheiden. Hinter einer dieser Türen verbirgt sich der Schlitten. Hinter den beiden anderen nur jeweils ein Besen, den gehässige Hexen dort platziert haben.

Nach kurzem Überlegen entscheidet sich der Weihnachtsmann für eine der drei Türen. Doch was tut Knecht Ruprecht. Er meint, dass er es dem Weihnachtsmann einfacher machen will und öffnet eine der verbleibenden zwei Türen, hinter der sich natürlich ein Besen versteckt. Dann bietet er dem Weihnachtsmann an, es sich noch einmal zu überlegen.

Was raten Sie unserem Weihnachtsmann: Soll er bei der gewählten Türe bleiben, oder soll er wechseln?

Frohe Weihnachten und alles Gute für das neue Jahr

Bernd Gimpel

P.S. Sollten der Kopf zu sehr rauchen, schauen Sie vielleicht auf meiner neu gestalteten Homepage vorbei. Dort finden Sie die Lösung im Bereich Unterhaltung versteckt ...

---

**[Datenanalyse](#) [DoE](#) [FMEA](#) [Kreatives Konstruieren](#) [Kreativworkshops](#) [Minitab](#) [Poka Yoke](#)  
[Problemlösung](#) [QFD](#) [Risk Man](#) [Roadmapping](#) [SPC](#) [Statgraphics](#) [Stressmanagement](#) [TRIZ](#)**

qe - Quality Engineers

Dr. Bernd Gimpel  
Brühlstr. 1  
D-52080 Aachen  
Tel. +49 241 95195-00  
Fax +49 241 95195-02  
[bernd.gimpel@geweb.de](mailto:bernd.gimpel@geweb.de)  
[www.geweb.de](http://www.geweb.de)

Finanzamt Aachen Außenstadt  
Steuernummer 201/5134/5017  
Ust.ID: DE169965803

**Lösung:**



So unwahrscheinlich es auch klingen mag, es ist besser zu wechseln. Bei der Aufgabe handelt es sich um das sogenannte Ziegenproblem, auf das mich mein Sohn Rainer vor einiger Zeit beim Abendessen ansprach. Er hatte davon im Informatikstudium gehört.

Da mich die letzten Jahre immer wieder Mails erreichten, denen die Rätsel zu einfach waren, dachte ich mir, diesmal etwas Kniffligeres zu nehmen. Das gemeine ist, dass es so einfach aussieht, aber statistisch doch anders ist, als man denkt.

Bei meiner Recherche zu der Aufgabenstellung bin ich auf den folgenden Artikel aus der Zeit vom 18.11.2004 gestoßen, der auch für Nicht Statistiker die Lösung anschaulich erklärt.

Viel Spaß beim Lesen! (Quelle: <http://www.zeit.de/2004/48/N-Ziegenproblem>).

## Das Rätsel der drei Türen

Am so genannten Ziegenproblem bissen sich sogar Nobelpreisträger die Zähne aus. Deutsche Forscher haben endlich einen Weg gefunden, die Lösung anschaulich zu erklären

Kaum eine andere mathematische Denkaufgabe hat die Gemüter (auch die der *ZEIT*- Leser) in den vergangenen Jahren so erhitzt wie das so genannte Ziegenproblem. Denn dem normalen, angeblich »gesunden«, Menschenverstand läuft die mathematisch korrekte Lösung derart zuwider, dass sich nur die wenigsten Zeitgenossen von ihr überzeugen lassen. Nun aber scheint erstmals eine Methode gefunden, die Sprache der Wahrscheinlichkeitsstatistik so zu übersetzen, dass sie selbst Schulkindern verständlich wird und allen Zweiflern einleuchtend erscheint.

Die Ausgangssituation des Ziegenproblems lautet folgendermaßen: Sie sind Kandidat einer Fernsehshow und dürfen eine von drei verschlossenen Türen auswählen. Hinter einer der Türen wartet der Hauptgewinn, ein prachtvolles Auto, hinter den anderen beiden steht jeweils eine meckernde Ziege.

Frohgemut zeigen Sie auf eine der Türen, sagen wir Nummer eins. Doch der Showmaster, der weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet, lässt sie nicht sofort öffnen, sondern sagt geheimnisvoll: »Ich zeige Ihnen mal was!« Er lässt eine andere Tür öffnen, sagen wir Nummer drei – und hinter dieser steht eine Ziege und glotzt erstaunt ins Publikum. Nun fragt der Showmaster lauend: »Bleiben Sie bei Tür Nummer eins, oder wählen Sie doch lieber Nummer zwei?« Was sollten Sie tun?

Dies ist das Ziegenproblem, das im angelsächsischen Sprachraum »Monty Hall Problem« genannt wird. Es geht auf die Spielshow *Let's Make a Deal* zurück, eine Art amerikanische

Variante von *Wetten, dass...*, die von Monty Hall moderiert wurde und vor allem in den sechziger und siebziger Jahren populär war. Die amerikanische Autorin Marilyn vos Savant, die als Frau mit dem höchsten je gemessenen IQ gilt, stellte das Ziegenproblem im Jahre 1990 in ihrer regelmäßigen Magazin-Kolumne vor und löste damit eine weltweite Debatte aus, die bis heute anhält.

Etwa 99 Prozent der mit dieser Aufgabe Konfrontierten sind der Meinung, dass das Auto ebenso gut hinter der einen wie der anderen Tür stehen kann, und fast 90 Prozent entscheiden sich angesichts dieser vermeintlichen Sachlage dafür, bei der ursprünglichen Tür zu bleiben. Die statistisch Vorgebildeten dieser Mehrheitsfraktion argumentieren ungefähr so: »Nachdem der Moderator eine Ziege gezeigt hat, bleibt Ihnen eine Wahrscheinlichkeit von eins zu zwei, die richtige Wahl zu treffen. Egal, ob Sie Ihre Entscheidung revidieren oder nicht, die Aussichten bleiben die gleichen.« Dies schrieb zum Beispiel ein promovierter Leser an Marilyn vos Savant.

Doch das Ziegenproblem gilt nicht umsonst als »Königin der Denk-Illusionen«. Die richtige Antwort lautet: Es ist besser, die Tür zu wechseln. Doch Marilyn vos Savant gelang es nicht, ihre Leser davon zu überzeugen. Das bewies der zumeist wütende Tenor von rund zehntausend Zuschriften (»Die Niete sind Sie!«). Selbst zwei Drittel der Briefschreiber aus Universitäten waren gegen sie. Ähnlich stark war die Resonanz auf zwei Artikel in der *ZEIT* vor über zehn Jahren. Am Ende entschloss sich deren Autor gar, dem Thema ein eigenes Buch zu widmen (Gero von Randow: *Das Ziegenproblem*, Rowohlt Verlag).

Selbst Paul Erdős, genialer Mathematiker des 20. Jahrhunderts und noch dazu Statistiker, beharrte lange auf der falschen Lösung. Seine Kollegen konnten ihn erst mit Hilfe einer Computersimulation überzeugen. Dabei wurden einfach 100 Runden durchgespielt. Wechseln erwies sich als besser.

### **Eigentlich ist die Lösung ganz einfach. Eigentlich!**

An der richtigen Lösung kann es mithin keinen Zweifel geben. Dennoch bleibt die Frage: Wie erkläre ich es einem Mathematiker oder gar einem mathematikfernen Normalbürger? Seit der großen Kontroverse probierten Didaktiker und Psychologen diverse Erklärungswege aus. Doch beim Großteil ihrer Versuchspersonen ernteten sie stets nur Verständnislosigkeit.

Erst in diesem Jahr waren Stefan Krauss vom Berliner Max-Planck-Institut für Bildungsforschung und seine Mitarbeiter erfolgreich. Sie konnten das Problem, an dem selbst Nobelpreisträger gescheitert sein sollen, so erklären, dass sogar Schüler die richtige Lösung verstanden. »Der entscheidende Trick dabei war sicherlich, dass wir nicht die Aufgabe analysiert haben, denn das wurde zehn Jahre lang gemacht«, sagt der Psychologe Krauss. »Wir haben einfach mal geschaut: Die wenigen, wenigen Leute, die das richtig machen – einige gibt es nämlich immer –, was machen die eigentlich? Was denken die?« Die Befunde kombinierten die Forscher mit Erkenntnissen der Denkpsychologie zu ihrer funktionierenden Erklärung.

Als Schlüssel erwies es sich, auch die Perspektive des Showmasters einzunehmen statt nur die des Kandidaten. Der zweite Kunstgriff besteht darin, nicht über abstrakte Wahrscheinlichkeiten zu rasonieren, sondern konkrete Fälle durchzuspielen. Es gibt ja nur drei Türen, und hinter einer muss das Auto stehen. Die drei – gleich wahrscheinlichen – Möglichkeiten lauten:

*Erstens:* Das Auto steht hinter Tür eins. In unserem Beispiel hat der Kandidat diese Tür gewählt, es wäre also sinnvoll, bei dieser Tür zu bleiben, was immer der Showmaster tut.

*Zweitens:* Das Auto steht hinter Tür drei. Dann muss der Showmaster natürlich Tür zwei öffnen. Denn er darf nicht das Auto hinter Tür drei zeigen, und er darf auch nicht enthüllen, ob der Kandidat mit Tür eins richtig liegt. In diesem Fall ist also das Wechseln zur verbleibenden Tür drei vorteilhaft.

*Drittens:* Das Auto steht hinter Tür zwei. Der Fall ist ein Spiegelbild des vorigen, nur dass der Showmaster diesmal Tür drei öffnet. Wieder verhilft Wechseln zur verbleibenden Tür zum Gewinn.

Fazit: Wer wechselt, gewinnt in zwei von drei Fällen, also empfiehlt sich Wechseln. So einfach ist das.

Hier noch die Erläuterung der Lösung von Marilyn vos Savant, die ich persönlich am anschaulichsten finde (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem>):

**Verlauf der Spielshow:** Der jeweilige Kandidat wählt ein Tor, der Moderator öffnet daraufhin immer ein anderes Tor mit einer Ziege dahinter und lässt danach dem Kandidaten noch einmal die Wahl zwischen den beiden noch geschlossenen Toren. Der Kandidat erhält das Auto, wenn es sich hinter dem von ihm zuletzt gewählten Tor befindet.

Somit erhält sie als Lösung die durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit aller möglichen Kombinationen von Toren, die von den jeweiligen Kandidaten gewählt werden und vom Moderator daraufhin geöffnet werden können. Weil die erste Wahl eines Kandidaten als beliebig und die Verteilung von Auto und Ziegen hinter den Toren als zufällig angesehen wird, darf jede der neun Möglichkeiten als gleichwahrscheinlich betrachtet werden:

<b>Tor 1 gewählt</b>	<b>Tor 2</b>	<b>Tor 3</b>	<b>Moderator öffnet...</b>	<b>Ergebnis beim Wechseln</b>	<b>Ergebnis beim Behalten</b>
Auto	Ziege	Ziege	Tor 2 oder Tor 3	Ziege	<b>Auto</b>
Ziege	Auto	Ziege	Tor 3	<b>Auto</b>	Ziege
Ziege	Ziege	Auto	Tor 2	<b>Auto</b>	Ziege
<b>Tor 1</b>	<b>Tor 2 gewählt</b>	<b>Tor 3</b>			
Auto	Ziege	Ziege	Tor 3	<b>Auto</b>	Ziege
Ziege	Auto	Ziege	Tor 1 oder Tor 3	Ziege	<b>Auto</b>
Ziege	Ziege	Auto	Tor 1	<b>Auto</b>	Ziege
<b>Tor 1</b>	<b>Tor 2</b>	<b>Tor 3 gewählt</b>			
Auto	Ziege	Ziege	Tor 2	<b>Auto</b>	Ziege
Ziege	Auto	Ziege	Tor 1	<b>Auto</b>	Ziege
Ziege	Ziege	Auto	Tor 1 oder Tor 2	Ziege	<b>Auto</b>

Drei von neun Kandidaten gewinnen, wenn sie bei ihrer ersten Wahl bleiben, während sechs von neun Kandidaten durch Wechseln das Auto bekommen. Ein Kandidat hat durch Wechseln also eine durchschnittliche Gewinnchance von  $p = 2/3$ .

Wer es selber ausprobieren will, kann dies z.B. mit der folgenden Simulation im Internet:

<http://www.userpages.de/ziegenproblem/>